ASTURIAS
Corporación Universitaria

Teoría de la Probabilidad

Índice

Objetivos

- Objetivo: Conocer los conceptos básicos para entender las distintas técnicas de conteo y análisis combinatorio.

1 Introducción

La existencia de fenómenos o experimentos no determinísticos, donde el conocimiento de las condiciones en las que éstos se desarrollan no garantiza los resultados, hace imprescindible el uso de una función que asigne **niveles de certidumbre** a cada uno de los desenlaces del fenómeno, y ahí es donde aparece la probabilidad. La **teoría de la probabilidad** es la parte de las matemáticas que **se encarga del estudio de los ya mencionados fenómenos o experimentos aleatorios**.

"Teoría de probabilidad: se encarga del estudio de los ya mencionados fenómenos o experimentos aleatorios"

Por **experimento aleatorio** entenderemos, todo aquel experimento que **cuando se le repite bajo las mismas condiciones iniciales, el resultado que se obtiene no siempre es el mismo. Ejemplo más sencillo y cotidiano de un experimento aleatorio:** Lanzar una moneda o un dado, y aunque estos experimentos pueden parecer muy modestos, hay situaciones en donde se utilizan para tomar decisiones de cierta importancia.

En principio, no sabemos cuál será el resultado del experimento aleatorio, así que por lo menos conviene agrupar en un conjunto a todos los resultados posibles. El **espacio muestral** (o también llamado espacio muestra de un experimento aleatorio) es el **conjunto de todos los posibles resultados del experimento, y se le denota** generalmente **por la letra griega Ω** (omega).

"Espacio muestral: conjunto de todos los posibles resultados del experimento"

Más adelante mostraremos que este conjunto no es necesariamente único, y su determinación depende del interés del observador o persona que realiza el experimento aleatorio. En algunos textos, se usa también la letra S para denotar al espacio muestral. Esta letra proviene del término sampling space de la lengua inglesa equivalente a espacio muestral. Por otro lado, llamaremos **evento** a **cualquier subconjunto del espacio muestral** y denotaremos a los eventos por las primeras letras del alfabeto en mayús
culas: *A, B, C,* etc. Una correcta proyección de estos y otros conceptos es lo que va a permitir estudiar grandes colectivos a partir de pequeñas partes de ellos, llamadas muestras, dando lugar a lo que se conoce como **inferencia estadística.**

"Evento: cualquier subconjunto del espacio muestral"

2 Conceptos Básicos

2.1 Experimento ε

Es c**ualquier acción o proceso cuyo resultado está sujeto a la incertidumbre**. Estos experimentos se llevan a cabo bajo ciertas condiciones con un número definido o indefinido de veces.

"Experimento: acción o proceso cuyo resultado está sujeto a la incertidumbre"

Un experimento se dice que es **determinístico**, cuando además **de conocer los posibles valores del experimento**, también **se conoce un resultado particular de él**.

Un experimento se dice que es aleatorio cuando, puede producir resultados diferentes, aun cuando se repita siempre de la misma manera.
Ejemplos de experimentos aleatorios:

- (ε_1) El lanzamiento de un dado no cargado y observar el número que aparece en la cara.
- (ε_2) El lanzamiento de una moneda cuatro veces y contar el número total de caras obtenidas.
- (ε_3) La fabricación de artículos en una línea de producción y contar el número de artículos defectuosos producidos en un período de 24 horas.
- (ε_4) El ala de un aeroplano se arma con un gran número de remaches. Contar el número de remaches defectuosos.
- (ε_5) Fabricar una bombilla. Luego se prueba su duración conectándola a un portalámparas y se anota el tiempo transcurrido (en horas) hasta que se quema.
- (ε_6) Fabricar artículos hasta producir 10 no defectuosos. Contar el número total de artículos manufacturados.
- (ε_7) Medir la resistencia a la tensión de una barra de acero.
- (ε_8) Un termógrafo marca la temperatura continuamente en un período de 24 horas. En un sitio y una fecha señalados, "leer" dicho termógrafo.
- (ε_9) Tiempo empleado por una persona de su casa al trabajo.
- (ε_{10}) Número de personas que llegan a una oficina bancaria en un período de 10 horas.

2.2 Espacio Muestral *Ω*

"Espacio muestral: conjunto de todos los resultados posibles de los experimentos"

Se define como el conjunto de todos los resultados posibles de ε. Para cada experimento considerado anteriormente, se describe el espacio muestral asociado como sigue:

- $\Omega_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$
- $\Omega_2 = \{0,1,2,3,4\}$
- $\Omega_3 = \{0,1,2,\dots,N\}$, donde N es el número máximo de artículos que se pudo construir en 24 horas.
- $\Omega_4 = \{1,2,\dots,M\}$, donde M es el número máximo de remaches instalados.
- $\Omega_5 = \{t: t \geq 0\}$
- $\Omega_6 = \{10,11,\dots\}$
- $\Omega_7 = \{S: S \geq 0\}$
- $\Omega_8 = \{t: m \leq t \leq M\}$, donde m es la temperatura mínima y M es la temperatura máxima.

- $\Omega_9 = \{t: t \geq 0\}$
- $\Omega_{10} = \{0,1, \ldots, N\}$

2.3 Evento

Un evento A respecto a un espacio muestral particular Ω, es cualquier recopilación (subconjunto) del espacio muestral Ω. Esto significa que, Ω mismo es un evento y también lo es el conjunto. Los siguientes son ejemplos de eventos asociados a los experimentos antes anotados: A_i se referirá a un evento asociado con el experimento ε_i.

- A_1: Un número par ocurre; esto es, $A_1 = \{2,4,6\}$
- A_2: Se obtienen dos o más caras, $A_2 = \{2,3,4\}$
- A_3: Todos los artículos fueron no defectuosos, $A_3 = \{0\}$
- A_4: Se obtienen menos de cuatro remaches, $A_4 = \{0,1,2,3\}$
- A_5: La bombilla se quema en menos de 10 horas, $A_5 = \{t: 0 \leq t \leq 10\}$.
- A_6:El número total de artículos manufacturados es inferior a 16, $A_6 = \{10,11,12,13,14,15\}$.

Dados dos eventos A y B asociados a un experimento aleatorio ε, tales que, $A \cap B = \emptyset$, entonces A y B se denominan eventos excluyentes.

Sean A y B eventos asociados a Ω, tales que $A \cap B = \Omega$ y $A \cup B = \emptyset$, entonces A y B se denominan eventos complementarios. Note que el elemento complementario de A es $B = A'$.

3 Concepto de Probabilidad

La probabilidad de un evento A, es un número real en el intervalo [0, 1] que denotaremos por $P(A)$, y representa una medida de la frecuencia con la que se observa la ocurrencia del evento A cuando se efectúa el experimento aleatorio en cuestión. Existen al menos cuatro definiciones de probabilidad las cuales explicamos a continuación.

3.1 Probabilidad Clásica

Sea A un subconjunto de un espacio muestral Ω de cardinalidad finita. Se define la probabilidad clásica del evento A como el cociente:

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

En donde el símbolo $\#A$ denota la cardinalidad o número de elementos del conjunto A. Claramente, esta definición es sólo válida para espacios muestrales finitos, pues forzosamente necesitamos suponer que el número de elementos en Ω es finito.

Además, el espacio debe ser equiprobable, pues para calcular la probabilidad de un evento A, únicamente necesitamos contar cuantos elementos tiene A respecto del total, sin importar exactamente qué elementos particulares sean.
Por lo tanto, esta definición de probabilidad presupone que todos los elementos de Ω son igualmente probables o tienen el mismo peso. Este es el caso, por ejemplo de un dado equilibrado.
Ejemplo: Para este experimento el espacio muestral es el conjunto $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, y si deseamos calcular la probabilidad (clásica) del evento A correspondiente a obtener un número par, es decir, la probabilidad de $A = \{2, 4, 6\}$, entonces

$$P(A) = \frac{\#\{2,4,6\}}{\#\{1,2,3,4,5,6\}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

3.2 Probabilidad Frecuentista

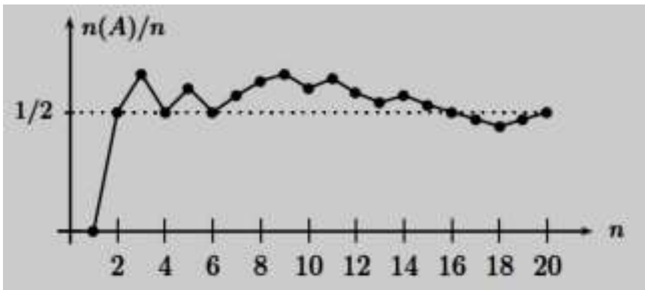
Suponga que se realizan n repeticiones de un cierto experimento aleatorio y sea A un evento cualquiera. Denotemos por $n(A)$ el número de ocurrencias del evento A, en las n realizaciones del experimento. Se define entonces la probabilidad frecuentista de A como indica el siguiente límite.

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n}$$

En este caso, debemos hacer notar que no es humanamente posible llevar a cabo una infinidad de veces el experimento aleatorio, de modo que en la práctica no es posible encontrar mediante este mecanismo la probabilidad de un evento cualquiera. Esta limitación, hace que esta definición de probabilidad no sea enteramente formal, pero tiene algunas ventajas.
Veamos un ejemplo concreto: Consideremos nuevamente el experimento aleatorio de lanzar un dado equilibrado y registrar la ocurrencia del evento A definido como el conjunto $\{2, 4, 6\}$. Después de lanzar el dado 20 veces se obtuvieron los siguientes resultados:

No.	Resultado	$n(A)/n$	No.	Resultado	$n(A)/n$
1	3	0/1	11	2	7/11
2	6	1/2	12	5	7/12
3	2	2/3	13	1	7/13
4	1	2/4	14	6	8/14
5	4	3/5	15	3	8/15
6	6	4/6	16	1	8/16
7	3	4/7	17	5	8/17
8	4	5/8	18	5	8/18
9	2	6/9	19	2	9/19
10	5	6/10	20	6	10/20

En la gráfica mostrada a continuación se ve el singular comportamiento de este cociente a lo largo del tiempo, al principio se pueden presentar algunas oscilaciones, pero eventualmente el cociente se estabiliza en un cierto número. Realizando un mayor número de observaciones del experimento, no es difícil creer que el cociente $n(A)/n$ se estabiliza en $1/2$ cuando n es grande y el dado es equilibrado. Se invita al estudiante intrigado a efectuar un experimento similar y corroborar esta interesante regularidad estadística con éste o cualquier otro experimento aleatorio de su interés.



3.3 Probabilidad Subjetiva

"Probabilidad subjetiva: se realiza según los datos que conoce el observador del fenómeno objeto de estudio"

En este caso, la probabilidad de un evento depende del observador, es decir, según lo que el observador conoce del fenómeno en estudio. Puede parecer un tanto informal y poco seria esta definición de la probabilidad de un evento, sin embargo, en muchas situaciones es necesario recurrir a un experto para tener por lo menos, una idea vaga de cómo se comporta el fenómeno de nuestro interés y saber si la probabilidad de un evento es alta o baja. Por ejemplo: ¿Cuál es la probabilidad de que un cierto equipo de fútbol gane en su próximo partido? Ciertas circunstancias internas del equipo, las condiciones del equipo rival o cualquier otra condición externa, son elementos que sólo algunas personas conocen y que podrían darnos una idea más exacta de esta probabilidad. Esta forma subjetiva de asignar probabilidades a los distintos eventos debe, sin embargo, ser consistente con una serie de reglas naturales que estudiaremos a continuación.

3.4 Probabilidad Axiomática

En la definición axiomática de la probabilidad, no se establece la forma explícita de calcular las probabilidades, sino únicamente se proponen las reglas que el cálculo de probabilidades debe satisfacer.

Los siguientes tres postulados o axiomas fueron establecidos en 1933 por el matemático ruso A.N. Kolmogorov.

"Si una función satisface los tres axiomas de Kolmogorov, entonces será llamado probabilidad"

No es difícil verificar que las definiciones anteriores de probabilidad satisfacen estos tres axiomas (propiedades básicas). De hecho, estos postulados han sido tomados directamente del análisis cuidadoso y reflexivo de las definiciones de probabilidad mencionadas anteriormente. En particular, observe que el tercer axioma es válido, no sólo para dos eventos ajenos sino para cualquier colección finita de eventos ajenos dos a dos. A cualquier función P que satisfaga los tres axiomas de Kolmogorov se le llama medida de probabilidad, o simplemente probabilidad. A partir de estos postulados, es posible demostrar que la probabilidad cumple con una serie de propiedades interesantes.

- Para cualquier evento A, $P(A) \geq 0$
- $P(\Omega) = 1$
- Si $A_1, A_2, A_3, \ldots$ es un conjunto de eventos mutuamente excluyentes, entonces

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

3.5 Propiedades

- $P(\emptyset) = 0$, donde $\emptyset$ es el evento nulo.
- Para cualquier evento A, $P(A') = 1 - P(A)$
- Para cualquier evento A, $P(A) \leq 1$
- Para dos eventos cualquiera A y B, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, si A y B son mutuamente excluyentes entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- Para dos eventos cualesquiera A y B, $P(A - B) = P(A \cap B') = P(A) + P(A \cap B)$

- Para tres eventos A, B y C se tiene $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cup B \cup C)$Si A, B y C son mutuamente excluyentes, entonces $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$

4 Resumen

- Teoría de probabilidad: se encarga del estudio de los ya mencionados fenómenos o experimentos aleatorios.
- Espacio muestral: conjunto de todos los posibles resultados del experimento.
- Evento: cualquier subconjunto del espacio muestral
- Experimento: acción o proceso cuyo resultado está sujeto a la incertidumbre.
- Espacio muestral: conjunto de todos los resultados posibles de los experimentos.
- Sí una función satisface los tres axiomas de Kolmogorov, entonces será llamado probabilidad.

5 Referencias Bibliográficas

- Montgomery, D. C y Runger, R. (2008). Probabilidad y Estadística Aplicadas a la Ingeniería. 2da. Edición. Limusa Wiley. Mexico.
- Rincón. L. (2010). Curso Elemental de Probabilidad y Estadística. 1ra Edición. Circuito Exterior de CU. México D.F.
- Walpole, R. E., Myers, R. H., Myers,S. L. y Ye, K. (2007). Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias. 8va. Edición. Pearson. Mexico
- I. Espejo Miranda, F. Fernández Palacín, M. A. López Sánchez, M. Muñoz Márquez, A. M. Rodríguez Chía, A. Sánchez Navas, C. Valero Franco. (2006). Estadística Descriptiva y Probabilidad. 3ra. Edición. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz.
- Devore, J. (2008). Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias. 7ma. Edición. Cengace Learning Editores. México
- Canavos, G. Probabilidad y Estadística. Métodos y Aplicaciones.
- Daniel, W. (2009). Bioestadística. Base para el análisis de las ciencias de la salud. Cuarta edición. Limusa Wiley. México.
- Mendenhall, W., Wackerly, D. y Scheaffer, R. (1994). Estadística Matemática con Aplicaciones. Grupo Editorial Iberoamericana. México.